lec2

$$[x+iy]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$
$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

Ex: Find roots of $(z+1)^7 + z^7 = 0$

sol

$(z+1)^7 = -z^7$

$\left(\frac{z+1}{z}\right)^7 = -1$

$\frac{z+1}{z} = (-1)^{\frac{1}{7}}$

$x = -1$, $y = 0$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$

$\frac{z_k+1}{z_k} = 1^{\frac{1}{7}} . e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)$ $k = 0, 1, 2$

$z_k + 1 = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} z_k$

$1 = \left(e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} - 1\right) z_k$

$z_k = \frac{1}{e^{i\frac{\pi+2k\pi}{7}} - 1}$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

① مجموع الجذور = $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

② مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى = $\frac{a_{n-2}}{a_n}$

⋮

حاصل ضرب الجذور = $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Ex: Use $z^n - 1 = 0$; $n = 2, 3, \dots$ to find Show:

ⓐ $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

ⓑ $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

ⓒ $\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{n}\right)\dots\left(\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \cancel{2}^{\left(\frac{-n^2}{2n-1}\right)}$ $\frac{n}{2^{n-1}}$

$Z^n - 1 = 0 \Rightarrow Z = (1)^{\frac{1}{n}}$

$x = 1 , y = 0 , r = 1 , \theta = 0$

$Z = re$

$Z = re^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$

The roots $Z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$ $, k = 0, 1, \ldots, n-1$

مجموع الجذور = صفر (معامل $Z^{n-1} = 0$)

$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{(n-1)} = 0$

$k=1 \quad k=2$

$+ e^{\frac{2\pi}{n} i} + e^{\frac{4\pi}{n} i} + \cdots + e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i} = 0$

$(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}) + (\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}) + \cdots + (\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}) = 0$

نساوي الحقيقي بالحقيقي

$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

$\cos\frac{2\pi}{n} + \qquad\qquad = -1$

نساوي التخيلي بالتخيلي

$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{2} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

Curves and rigion on complex plan

المنحنيات والمناطق في مستوى الأرجند (مستوى الأعداد المركبة)

$|Z - Z_0| = C$

المحل الهندسي لجميع النقط التي تتحرك في Z plan بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة يساوي مقدار ثابت

هامش:

$Z = x + iy$

$Z_0 = x_0 + iy_0$

$|Z - Z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = C$

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = C$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C^2$

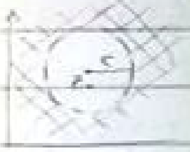
دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها C

② $|z - z_0| \leq c$

المنطقة داخل الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها c

③ $|z - z_0| > c$

المنطقة خارج الدائرة

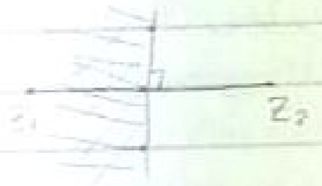


④ $c_2 \leq |z - z_0| \leq c_1$

annulus حلقة

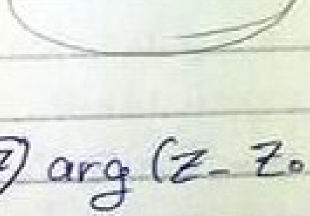
⑤ $|z - z_1| \leq |z - z_2|$

* المحل الهندسي لجميع النقط التي تتحرك بحيث بعدها عن z_1 أقل من أو يساوي بعدها عن z_2 (خلينا الأول في حالة التساوي)
* الشكل الناتج خط عمودي على المسافة والتهشير يكون في المنطقة التي تقع فيها z_1

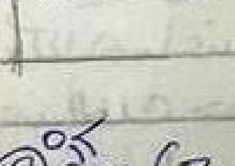


⑥ $|z - z_1| + |z - z_2| = c$

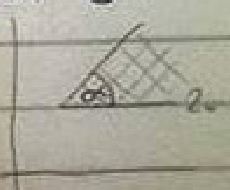
* نلاحظ أن هذه المعادلة تعطي المحل الهندسي لجميع النقط التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدار ثابت
* قطع ناقص بؤرتيه z_1 و z_2 وطول محوره الأكبر c



⑦ $\arg(z - z_0) = \alpha$



⑧ $0 \leq \arg(z - z_0) \leq \alpha$



⑨ $\alpha \le \arg(z - z_0) \le \beta$

Ex: Find Curves and regions graphically:

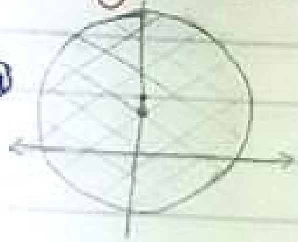
ⓐ $|z - i| < 2$

ⓑ $|z - i| + |z + i| = 4$

ⓒ $|\arg(z + 3i)^3| \le \pi$

Sol

ⓐ



دائرة مركزها i = $x_0 = 0, y_0 = 1$

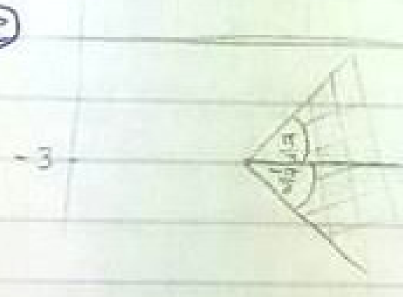
ونصف قطرها 2 والتهشير داخل الدائرة

ⓑ

قطع ناقص بؤرتيه $z_1 = i, z_2 = -i$

وطول محوره الأكبر 4

ⓒ



$-\pi \le \arg(z - (5 - 3i))^3 \le \pi$

$-\pi \le 3\arg(z - (5 - 3i))^3 \le \pi$

The Complex Functions

$z = re^{i\theta}$

$z = x + iy$

حيث أن الأعداد المركبة يمكن أن تكتب بطريقتين:

وكلاهما عند الفك تحتوي على جزء حقيقي وجزء تخيلي

عند الفك جميع الدوال نستخدم عدا $\ln z$, z^2 ثم z

تستبدل z بأحدى قيمها.

Ex: Put the following f^{ns} in form $f(z) = u + iv$

① $f(z) = e^{5z}$

② $f(z) = z^5$

③ $f(z) = \ln z$

④ $f(z) = \sin z$

Sol

① $f(z) = e^{5z}$; $z = x + iy$

$= e^{5(x+iy)} = e^{5x} \cdot e^{5iy} = e^{5x}(\cos(5y) + i\sin(5y))$

$\therefore u = e^{5x}\cos(5y)$

$v = e^{5x}\sin(5y)$

② $f(z) = z^5 = (re^{i\theta})^5 = r^5[\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)]$

$\therefore u = r^5\cos(5\theta)$

$v = r^5\sin(5\theta)$

* لو عوضت عن $z = (x+iy)$ صح بس طويل

هتفك بذات الحدين $(x+iy)^5$

③ $f(z) = \ln(z)$, $z = re^{i(\theta \pm 2\pi k)}$

$= \ln(re^{i(\theta \pm 2\pi k)}) = \ln r + \ln e^{i(\theta \pm 2\pi k)}$

$= \ln r + i(\theta \pm 2\pi k)$, $\ln e = 1$

at $k = 0$. the value is principal value.

④ $f(z) = \sin(z)$, $z = x + iy$

$= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

* الـ cos زي ما بياكل الإشارة بياكل الـ i وتقلب cosh

والـ sin زي ما بيطلع الإشارة بيطلع الـ i وتقلب sinh

$\therefore \sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

$\therefore u = \sin x . \cosh y$

$v = \cos x . \sinh y$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

$\sinh = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\cosh = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\cos iz = \cosh z$

$\sin iz = i\sinh z$

$\cosh iz = \cos z$

$\sinh iz = i\sin z$

The continuity of Complex f^n

given $\varepsilon > 0$ there is exist $\delta > 0$ such that if $|z - z_0| < \delta$ then $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$|z - z_0| < \delta \qquad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

الدالة تكون متصلة عند نقطة إذا تحقق الشروط الثلاثة :

① الدالة معرفة عن z_0

② النهاية موجودة عن z_0

$\lim_{z \to z_0} f(z_0)$ is exist

③ النهاية = قيمة التعريف

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$